УДК 330.4

Моделирование доходности и волатильности финансовых индексов в финансово-экономических моделях

Кузнецов Н.Е.
Аспирант Научно-исследовательского института
«Полюс» им. М.Ф. Стельмаха» (Москва)

Хуснулин Р.К.
Кандидат педагогических наук, докторант
Санкт-Петербургского государственного экономического университета,
депутат Государственной Думы Федерального Собрания РФ

Статья посвящена моделям и моделированию доходности и волатильности финансовых индексов. В статье рассмотрена теоретическая составляющая финансово-математических моделей и продемонстрировано их применение на практике. Для объективной оценки эффективности использования моделей с длинной памятью, доходность и волатильность в работе моделируется как с помощью моделей длинной памяти, так и с помощью аналогичных моделей с короткой памятью, которые с математической точки зрения являются более простыми.

Ключевые слова: финансовые рынки, модели авторегрессионной условной гетероскедастичности, модели авторегрессии и скользящего среднего (ARMA) (модели Бокса-Дженкинса).

В настоящее время существует большое число моделей, и постоянно появляются новые, которые так или иначе можно было бы отнести к классу моделей с длинной памятью, поэтому для начала формально обозначим круг моделей, используемых в данном исследовании. Методы прогнозирования подразделяются на качественные и количественные. Количественные подразделяются на линейные и нелинейные. Внутри линейных моделей находится три группы моделей, модели анализа временных рядов, эконометрические (структурные) модели и вспомогательные модели. Модели, используемые для моделирования доходности, относятся к группе моделей анализа временных рядов и в данной классификации имеют наименование «Модели авторегрессии и скользящего среднего (*ARMA*) (модели Бокса-Дженкинса)». Нелинейные модели в классификации Миркина подразделяются на семь групп. Модели для волатильности с короткой памятью из данной работы относятся к нелинейным моделям, которые называются «Модели авторегрессионной условной гетероскедастичности» и являются одномерными (в группу также входят многомерные модели). Модели волатильности с длинной памятью, на которых сосредоточено большее внимание в настоящей статье, составляют отдельную группу нелинейных моделей, называющуюся «Модели длинной памяти (*FIGARCH*)». На русском языке модели с короткой памятью *ARMA* называются моделями авторегрессии и скользящего среднего или моделями авторегрессионного скользящего среднего (англ. *Autoregressive Moving Average*). Как понятно из названия, модели типа *ARMA* объединяют в себе модель авторегрессии (*AR*) и модель скользящего среднего (*MA*) в единую модель временного ряда. Перед тем как привести саму модель, напомним, как выглядят модели *AR* и *MA* каждая в отдельности. Процесс авторегрессии первого порядка *AR*(1) можно изобразить следующим образом:

$$x_t = [\![\varphi x]\!]_{(t-1)} + \varepsilon_t$$

где x_t – наблюдение в настоящий момент времени;

$x_{(t-1)}$ – наблюдение в предыдущий момент времени (лаг = 1);

φ – оцениваемая константа;

ε_t – стандартная ошибка $\varepsilon_t \sim IID(0,\sigma_{\varepsilon 2})$.

Процесс авторегрессии порядка p $AR(p)$ записывается аналогичным образом:

$$\boldsymbol{x_t = \llbracket \varphi_1 x \rrbracket_{(t-1)} + \llbracket \varphi_2 x \rrbracket_{(t-2)} + \ldots + \llbracket \varphi_p x \rrbracket_{(t-p)} + \varepsilon_t}$$

где $x_{(t-p)}$ – наблюдение р шагов назад;

φ_p – константы, оцениваемые с помощью регрессии.

Такое построение модели означает, что для временного ряда x_t уровень текущих наблюдений зависит от уровня предыдущих наблюдений. Например, если в текущем квартале наблюдается высокий уровень цен, то и в ближайшие несколько кварталов уровень будет ожидаться высоким. Можно описать процесс и по-другому, сказав, что наблюдения случайной величины в момент времени t зависят не только от шока в момент времени t, но и от шоков, которые произошли в предыдущие моменты времени. Например, если мы наблюдаем негативный шок для экономики, скажем, катастрофическое землетрясение, то мы ожидаем, что этот негативный эффект скажется на экономике не только в текущий момент времени, но и в ближайшем будущем. Такой вид мышления представлен моделью скользящего среднего *MA*. Процессы скользящего среднего первого порядка *MA*(1) и порядка *q* *MA*(*q*) выглядят следующим образом:

$$\boldsymbol{x_t = \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{(t-1)}}$$

для MA(1) и

$$\boldsymbol{x_t = \varepsilon_t + \llbracket \theta_1 \varepsilon \rrbracket_{(t-1)} + \llbracket \theta_2 \varepsilon \rrbracket_{(t-1)} + \ldots + \llbracket \theta_q \varepsilon \rrbracket_{(t-q)}}$$

для *MA*(*q*), где θ_q – оцениваемые константы модели *MA*(*q*).

Если мы объединим эти две модели, то получим общую модель *ARMA*(*p,q*):

$$\boldsymbol{x_t = \llbracket \varphi_1 x \rrbracket_{(t-1)} + \ldots + \llbracket \varphi_p x \rrbracket_{(t-p)} +}$$
$$\boldsymbol{+ \varepsilon_t + \llbracket \theta_1 \varepsilon \rrbracket_{(t-1)} + \ldots + \llbracket \theta_q \varepsilon \rrbracket_{(t-q)}}$$

Общая модель *ARMA* была описана ещё в 1951 г. в диссертации Питера Уиттла «*Hypothesis testing in time series analysis*» [1], но была популяризирована лишь в 1970 г. в книге Джорджа Бокса и Гвилима Дженкинса [2]. На сегодняшний день *ARMA* представляет из себя один из основных инструментов моделирования временных рядов. Используя лаговые операторы, модель можно записать в более компактном виде. Разовое применение лагового оператора *L* к переменной сдвигает её на одну единицу времени назад:

$$\boldsymbol{\llbracket Lx \rrbracket_t = x_{(t-1)}}$$

Применяя лаговый оператор *k* раз, мы сдвигаем переменную на *k* единиц времени:

$$\boldsymbol{\llbracket L^k x \rrbracket_t = x_{(t-k)}}$$

Таким образом, модели *AR* и *MA* можно переписать как:

$$\boldsymbol{AR(p){:}\ x_t\,(1 - \varphi_1 L - \varphi\__2 L^2 - \ldots \llbracket -\varphi \rrbracket_p L^p) = \varepsilon_t}$$
$$\boldsymbol{MA(q){:}\ x_t = \varepsilon_t\,(1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \ldots + \theta_q L^q)}$$

Пусть $\varphi_0=1$ и $\theta_0=1$, тогда определим лаговые полиномы как

$$\boldsymbol{\varphi(L) = 1 - \varphi_1 L - \varphi_2 L^2 - \ldots \llbracket -\varphi \rrbracket_p L^p}$$
$$\boldsymbol{\theta(L) = 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \ldots + \theta_q L^q}$$

С помощью лаговых полиномов процесс *ARMA* переписывается наиболее компактным образом:

$$\boldsymbol{AR{:}\ \varphi(L)\,x_t = \varepsilon_t}$$
$$\boldsymbol{MA{:}\ x_t = \theta(L)\,\varepsilon_t}$$
$$\boldsymbol{ARMA{:}\ \varphi(L)\,x_t = \theta(L)\,\varepsilon_t}$$

Важным свойством является то, что при определённых условиях можно обращать процессы *AR* в *MA* и наоборот. Процесс с короткой памятью *AR*(*p*) можно представить через процесс *MA*(∞) с бесконечной памятью, а *MA*(*q*) через *AR*(∞). Наконец, процесс *ARMA(p*,q) также может быть выражен через *MA*(∞). Условие нахождения корней характеристического уравнения вне единичного круга крайне важно, так как также является условием стационарности процесса. Предположение о стационарности процесса является наиболее распространённым предположением при работе с временными рядами. Свойством стационарного процесса является то, что его структура среднего, дисперсии и автокорреляции (зависит только от лага) не меняется с течением времени. Процессы с таким свойством называются стационарными в широком смысле или слабо стационарными. По теореме Вольда любой стационарный в широком смысле ряд может быть представлен в форма *MA*(∞). Стационарность в узком смысле или строгая стационарность означает, что безусловное совместное распределение стохастического процесса не зависит от сдвига по времени. Из стационарности в узком смысле следует стационарность в широком, обратное неверно. В эконометрике рассматриваются и те, и другие, однако всё же строгая стационарность встречается редко. Примером строго стационарного ряда является белый шум, теоретический процесс с нулевым средним, постоянной дисперсией, полным отсутствием автокорреляции и неизменным распределением. При этом если распределение нормальное, то такой процесс называется гауссовским или нормальным. Наличие стационарности ряда является основным требованием для возможности оценки процесса через модель *ARMA*. Наиболее распространённым тестом для проверки временного ряда на стационарность является расширенный тест Дики–Фуллера (англ. *ADF test, Augmented Dickey–Fuller test*), который является усложнённым тестом на единичные корни Дики–Фуллера. В статистике и эконометрике расширенный тест Дики–Фуллера проверяет нулевую гипотезу о том, что процесс нестационарен. Альтернативной гипотезой обычно является стационарность или стационарность относительно тренда. Главным отличием расширенного теста от обычного является то, что при оценке статистики Дики–Фуллера используется процесс авторегрессии первого порядка, а для расширенной статистики Дики–Фуллера – более высокого порядка. Также расширенная статистика Дики–Фуллера (*ADF*), используемая в тесте, является отрицательным числом. Чем оно больше по модулю, тем сильнее отклонение от гипотезы о том, что существует единичный корень на некотором уровне значимости. К сожалению, тест не идеален и, как и другие тесты на единичные корни, бывает, приводит к ошибкам первого типа, то есть некорректному отвержению корректной гипотезы. Альтернативным тестом на стационарность временного ряда является тест *KPSS* Квятковского–Филлипса–Шмидта–Шина. В отличие от расширенного теста Дики–Фуллера, в тесте Квятковского–Филлипса–Шмидта–Шина нулевой гипотезой является стационарность временного ряда. Тест также неидеален и может приводить к ошибкам первого типа, поэтому часто тесты *ADF* и *KPSS* используются вместе. Если нулевая гипотеза теста *KPSS* не отвергается при отвержении нулевой гипотезы теста *ADF*, то это можно считать весомым аргументом в пользу стационарности ряда. Если, наоборот, нулевая гипотеза отвергается по тесту *KPSS* и не отвергается по *ADF*, значит ряд точно нестационарен, и его нужно приводить к стационарному. Если нулевая гипотеза по обоим тестам не отвергается или же, наоборот, отвергается, значит нельзя однозначно говорить о долгосрочных характеристиках ряда. Можно сделать лишь допущение, согласно одному из тестов, или же попробовать как-то улучшить стационарность ряда. Если временной ряд не является стационарным, то часто его можно привести к стационарному с помощью одного из следующих методов. Во-первых, для непостоянной дисперсии взятие логарифма или квадратного корня ряда может её значительно стабилизировать. Для отрицательных данных можно добавить некую константу, чтобы сделать все данные положительными перед началом преобразований. Затем эта константа может быть вычтена из модели для получения прогнозов. Во-вторых, если данные содержат тренд, можно подобрать некоторый тип кривой к данным, а затем смоделировать остатки. Так как обычно целью является удаление долгосрочного тренда, чаще всего используется обычная прямая. Данный метод также называется детрендированием. Наконец, можно работать не с самой переменной, а с её разностями. Разности можно брать сколько угодно раз, однако обычно используют первые разности:

$$\Delta x_t = x_t - x_{(t-1)}$$

Если полученные разности являются стационарным процессом, говорят, что переменная x_t является интегрированной первого порядка и обозначается $I(1)$. Наличие единичного корня в авторегрессионной модели, что проверяется с помощью упомянутого расширенного теста Дики-Фуллера, показывает эту интегрированность, то есть, чтобы получить стационарный процесс, необходимо взятие разностей. Самым наглядным примером подобного преобразования может быть приведение нестационарного ряда цен к стационарному ряду доходностей, когда берутся первые разности логарифмов цены. Отсюда возникла интегрированная модель авторегрессии – скользящего среднего *ARIMA*(*p,d,q*) (англ. *Autoregressive Integrated Moving Average*) Бокса и Дженкинса (1976), которая является моделью *ARMA*(*p,q*) с добавленным в неё целочисленным порядком интегрированности процесса *d*. Для описанного выше интегрированного процесса первого порядка, для которого берутся первые разности, *d* равно 1, для *ARMA*-процесса *d* равно 0.

Модель выражается следующей формулой:

$$\boldsymbol{ARIMA(p,d,q): \left(1 - \sum_{i=1}^{p} \varphi_i L^i\right)(1-L)^d x_t =}$$

$$= \left(1 + \sum_{i=1}^{q} \theta_i L^i\right) \varepsilon_t$$

Аналогично через лаговые полиномы:

$$\varphi(L)\,(1-L)^d\, x_t = \theta(L)\,\varepsilon_t$$

Часто, когда говорят про процесс *ARIMA*, подразумевается процесс интегрированности первого порядка, поэтому можно увидеть запись *ARIMA*(*p,q*) – тогда в запись формулы параметр *d*, равный 1, не включается:

$$ARIMA(p,q):\ \varphi(L)(1-L)\, x_t = \theta(L)\,\varepsilon_t$$

Во всех моделях также можно добавлять константу, однако необходимо помнить, что константа и среднее для модели *ARIMA* – это разные цифры, если в модели присутствует часть *AR*. Рассмотрим модель *ARIMA*(*p*,1,0). Для удобства обозначим первые разности как y_t, то есть $y_t = x_t - x_{(t-1)}$. Запишем уравнение прогноза по модели, в которой присутствует константа:

$$\hat{y}_t = \varphi_0 + \varphi_1 y_{(t-1)} + \varphi_2 y_{(t-2)} + \ldots + \varphi_p y_{(t-p)}$$

Получается обычная множественная регрессия, в которой φ_0 – это константа. Представим эту же модель в форме отклонений от среднего μ:

$$\hat{y}_t = \mu + \varphi_1 (y_{(t-1)} - \mu) + \varphi_2 \times (y_{(t-2)} - \mu) + \ldots$$
$$+ \varphi_p (y_{(t-p)} - \mu)$$

Видно, что

$$\varphi_0 = \mu(1 - \varphi_1 - \varphi_2 - \ldots - \varphi_p)$$

то есть константа – это среднее, умноженное на один минус сумма коэффициентов *AR*. При отсутствии части *AR* константа является также и средним.

При моделировании временного ряда с помощью модели *AR(I)MA*, после проверки ряда на стационарность необходимо оценить количество параметров *p* и *q* в модели *ARMA(p,q)*. Наиболее простым способом является использование программного обеспечения, такого как R, где можно попробовать сразу множество вариантов и посмотреть, что подходит лучше всего, однако оценить порядок *p* и *q* можно, используя автокорреляционную (АКФ, англ. *ACF*, *autocorrelation function*) и частную автокорреляционную (ЧАКФ, англ. *PACF, partial autocorrelation function*) функции. На практике, так как модели с большими порядками p и q практически не используются, и даже редко можно увидеть p и q больше 2, обычно есть возможность построить все варианты спецификаций и после выбрать наилучшую.После выбора количества параметров необходимо оценить их значения. Модели A*R(I)MA*, которые включают в себя только часть *AR*, являются частными случаями моделей линейной регрессии, следовательно, параметры могут быть оценены методом наименьших квадратов. Модели *AR(I)MA*, включающие в себя часть *MA* похожи на регрессионные модели, однако их коэффициенты уже не могут быть найдены обычным методом наименьших квадратов, так как ошибки, являющиеся независимыми переменными в модели, не будут известны, пока сама модель не построена. Оценить коэффициенты таких моделей можно, к примеру, с помощью метода максимального правдоподобия. Данный метод оценивает параметры модели с помощью максимизации функции правдоподобия или её логарифма и широко используется в различных областях статистического анализа. По значению функции правдоподобия нельзя сказать, насколько хорошо модель подходит имеющимся данным, однако можно сравнивать как одинаковые модели с разными параметрами, так и разные модели между собой.Также часто для сравнения моделей с разным числом параметров и определения лучшей применяют так называемые информационные критерии. Чаще всего используются информационные критерии *SIC* (Шварц, 1997), *AIC* (Акаике, 1974, 1976) и *HQIC* (Ханнан и Куинн, 1979).

SIC (информационный критерий Шварца, также известен как Байесовский информационный критерий *BIC*):

$$SIC = ln⟦(n)⟧k - 2\ ln(L)$$

где n – число наблюдений;

k – количество оцениваемых параметров (например, у нормального распределения их 2, μ и σ);

L – значение логарифмической функции правдоподобия при текущих параметрах.

SIC (информационный критерий Акаике):

$$AIC = (2n/(n - k - 1))k - 2\ ln(L)$$

или

$$AIC = 2k - 2\ ln⟦(L),⟧\ n >> k$$

для большого числа наблюдений.

HQIC (информационный критерий Ханнана–Куинна):

$$HQIC = 2\ ln⟦(ln⟦(n)⟧)⟧k - 2\ ln(L)$$

Информационные критерии измеряют компромисс между точностью и сложностью модели. Целью является нахождение модели с наименьшим значением выбранного информационного критерия. Слагаемое -2*ln*(*L*), появляющееся в каждой формуле, отвечает за точность модели. Различие критериев кроется в первой части формул, отвечающей за «наказание» от увеличения числа оцениваемых параметров, то есть сложности модели. Рассмотренные критерии универсальны и могут применяться к моделям из любой группы, например, моделям с длинной памятью, о которых речь пойдёт далее.

В то время как модели с длинной памятью начали использоваться эконометристами примерно с 80-х гг., как было показано в статье [3], в физических науках такие модели играют важную роль уже с 50-х гг., и применялись статистиками в таких областях, как гидрология и климатология, поэтому исследователи уже давно признают наличие большой памяти в данных, записанных как во времени, так и в пространстве.

Наличие длинной памяти можно определить эмпирически, исходя из персистентности наблюдаемых автокорреляций. Степень персистентности согласуется со стационарным процессом, где автокорреляции убывают значительно медленнее, чем, скажем, экспоненциально убывающая автокорреляционная функция процесса *ARMA*. Функция автокорреляции часто проявляет персистентность, которая не согласуется ни с процессом *I*(1), ни с процессом *I*(0). Выбор только между интегрированными процессами первого и нулевого порядков представляется слишком ограниченным. В связи с этим был введён дробный порядок интегрированности процесса *d*, а процесс *I*(*d*) назвали дробно- или фрактально-интегрированным. Процесс *I*(*d*) с дробным числом *d* может рассматриваться как компромисс между парадигмами *I*(0) и *I*(1), что логично ещё потому, что длинная память – это нечто среднее между короткой и бесконечной памятью. Одним из главных достоинств моделей длинной памяти является то, что они дают отличные от традиционных подходов макроэкономики прогнозы, в том числе последствий шоков. У длинной памяти не существует какого-то одного официального определения, однако существует сразу несколько авторских, дополняющих друг друга. Приведём два из них. Первое, определение Мак–Лауда и Хипела (1978), говорит, что процесс обладает длинной памятью, если

$$\lim_{T\to\infty} \sum_{i=-T}^{T} r_i \to \infty$$

где r_i – это автокорреляция *i*-го лага с нулевым лагом.

Как наиболее общее определение можно предложить формулировку Ресника (1987) и Хелсона и Сарасона (1967). Процесс обладает длинной памятью, если для больших лагов *k*, автоковариационная функция равна

$$\gamma_k \approx \Xi(k)\ k^{(2H-2)}$$

где $\Xi(k)$ – это любая медленно изменяющаяся на бесконечности функция, то есть стремящаяся к константе;

H – коэффициент Хёрста.

Процесс $ARFIMA(0,d,0)$ можно формально определить как фрактальный белый шум:

$$(1-L)^d x_t = \varepsilon_t$$

где ε_t – это белый шум со средним значением 0 и дисперсией 1.

Основные свойства фрактального белого шума [4]:

– когда $d < 0,5$, дисперсия конечна, процесс x_t можно представить бесконечным процессом $MA(\infty)$;

– когда $d > -0,5$, процесс x_t обратим, и его можно представить бесконечным процессом $AR(\infty)$;

– когда $-0,5 < d < 0,5$, автоковариационная функция процесса равна

$$\gamma_k = \frac{\Gamma(k + d)\Gamma(1 - 2d)}{\Gamma(k - d + 1)\Gamma(1 - d)\Gamma(d)}$$

где Γ – это Гамма функция.

Определение по Гауссу:

$$\Gamma(z) = \lim_{(n\to\infty)} \frac{(n - 1)!n^z}{(z(z + 1)(z + 2)\ldots(z + n - 1),}$$

$$z \in C \setminus \{0, -1, -2,\ldots\}.$$

Тогда автокорреляционная функция при больших k будет равна

$$r_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{\Gamma(k + d)\Gamma(1 - d)}{\Gamma(k - d + 1)\Gamma(d)} \approx \frac{\Gamma(1-d)}{\Gamma(d)} k^{(2d-1)}$$

Исходя из них, $d = H - 0,5$, и мы имеем дробно-интегрированный процесс с длинной памятью, если $0 < d < 0,5$ $(0,5 < H < 1)$. Если же $-0,5 < d < 0$ $(0 < H < 0,5)$, то бесконечная сумма модулей автокорреляций стремится к константе, то есть процесс не обладает длинной памятью. В таких случаях говорят, что процесс обладает антиперсистентностью или средней памятью. Дробно-интегрированная модель авторегрессии – скользящего среднего $ARFIMA(p,d,q)$ (англ. *Autoregressive Fractionally Integrated Moving Average*) Грейнджера и Жуайё (1980) выражается точно так же, как и процесс $ARIMA(p,d,q)$, однако имеет дробный порядок интегрированности:

$$ARFIMA(p,d,q): \varphi(L)\ (1 - L)^d x_t = \theta(L)\ \varepsilon_t$$

Корни обоих полиномов, $\varphi(z) = 0$ и $\theta(z) = 0$, должны находить вне единичного круга, чтобы процесс был стационарным и обратимым. Видно, что процессы $ARIMA(p,q)$ и $ARMA(p,q)$ являются частными случаями $ARIMA(p,d,q)$ при $d = 1$ и $d = 0$. Влияние параметра d спадает по гиперболе с ростом лага, в то время как эффекты параметров φ_i и θ_i падают по экспоненте. Именно поэтому параметр d был выбран для отражения высоко-лаговой автокорреляции во временных рядах, в то время как φ_i и θ_i выбраны для описания низко-лаговой автокорреляционной структуры. Действительно, долгосрочное поведение процесса $ARFIMA(p,d,q)$ соотносится с процессом $ARFIMA(0,d,0)$ с таким же значением d, поскольку для дальних наблюдений эффекты параметров φ_i и θ_i будут незначительными. Помимо того, что параметр d можно выразить через коэффициент Хёрста, для оценки непосредственно параметра d существует целый ряд методов. Одним из наиболее часто используемых является оценка Гевеке и Портера–Гудака *GPH* (англ. *Geweke and Porter-Hudak Estimator*).

Полученные количественные результаты, определяющие память рынков, были связаны с качественными характеристиками рынков при помощи авторского алгоритма, включающего в себя следующие характеристики: «Свободный и развитый фондовый рынок», «Справедливое и непредвзятое отношение к миноритарным акционерам» и «Разрешённые внебиржевые сделки». Разработанный алгоритм позволяет, избегая каких бы то ни было расчётов, определить преобладающую память на рынке. Иначе говоря, утверждается, что приведённые три характеристики в значительной мере определяют эффективность применения на конкретном рынке для прогнозирования авторегрессионных моделей с длинной памятью, то есть дадут ли они более близкие к реальности результаты, чем аналогичные модели с короткой памятью. К плюсам данного алгоритма можно отнести его предельную простоту. Первым шагом определяется, можно ли определить рассматриваемый рынок как «свободный и развитый» (указание на эту и другие характеристики рынков можно найти на официальном сайте *FTSE*). Если ответ положителен, проверяется условие справедливого и непредвзятого отношения к миноритарным акционерам. Если и здесь ответ положителен, рынок смело можно относить к рынкам с длинной памятью, если же ответ «нет» или ответом на первый вопрос было «нет», проверяется третье условие разрешённости внебиржевых сделок. При положительном ответе рынок определяется как рынок с длинной памятью, при отрицательном – рынок однозначно относится к рынкам с короткой памятью.

Дальнейшие направления исследования могут включать в себя как проверку влияния на полученный результат использования других распределений, помимо нормального, так и рассмотрение отдельных моделей с длинной памятью, не входящих в базовую классификацию, но использующих предположение о длинной памяти временного ряда. Также возможно сравнение между собой прогнозов более сложных авторегрессионных моделей и проверка предположения о схожих результатах. Следующим направлением исследования может стать изучение памяти рынков производных финансовых инструментов, проверка применимости на них разработанного алгоритма и его вероятная доработка. Помимо этого, возможна доработка алгоритма для применения его не для рынка в целом, а для конкретных отдельных инструментов.

Литература:

1. Whittle P. Hypothesis testing in time series analysis. – Thesis: Uppsala Univ., 1951. – 726 p.
2. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов: прогноз и упр. / Пер. с англ. А.Л. Левшина, под ред. В.Ф. Писаренко. – М.: Мир, 1974. – 406 с.
3. Кузнецов Н.Е. Анализ прогнозирования мировых рынков акций с помощью авторегрессионных моделей с длинной памятью // Инновации и инвестиции. – 2018. – № 4. – С. 268-273.
4. Granger C.W.J., Joyeux R. An Introduction to Long-memory Time Series Models and Fractional Differencing // Journal of Time Series Analysis. – 1980. – Vol. 1. – P. 15-29.
5. Вербик М. Путеводитель по современной эконометрике / Пер. с англ. В.А. Банникова. Науч. ред. и предисл. С.А. Айвазяна. – М.: Научная книга, 2008. – 616 с.
6. Дука О.С., Сидоренко В.Н. Анализ доходности и волатильности финансовых активов с использованием моделей arima-(e)garch и arfima-figarch // Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов 2006». – М., 2006. – С. 204-206.
7. Канторович Г.Г. Анализ временных рядов // Экономический журнал ВШЭ. – 2002. – № 1. – С. 85-116.
8. Канторович Г.Г. Анализ временных рядов // Экономический журнал ВШЭ. – 2002. – № 2. – С. 251-273.

Modeling of profitability and volatility of financial indices in financial and economic models

Kuznetsov Nikita Evgenyevich,
Research Institute "Polyus" n.a. M. F. Stelmakh"
Ravil Khusnulin
St. Petersburg state University of Economics

The article is devoted to models and modeling of profitability and volatility of financial indices. The article considers the theoretical component of financial and mathematical models and demonstrates their application in practice. For an objective assessment of the efficiency of using models with long memory, the profitability and volatility in the work is modeled using both long memory models and similar models with short memory, which from a mathematical point of view are simpler.

Key words: financial markets, models of autoregressive conditional heteroskedasticity, models of autoregression and moving average (ARMA) (Box-Jenkins model).