УДК 519.86

Прямая задача потребительского выбора с переменными ценами благ и численные методы её решения

Арутюнова Н.К.
Ассистент кафедры прикладной математики и информатики Казанского национального исследовательского технического университета им. А.Н. Туполева – КАИ

Заботин В.И.
Доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой математики Университета управления ТИСБИ (Казань), профессор кафедры прикладной математики и информатики Казанского национального исследовательского технического университета им. А.Н. Туполева – КАИ

Заботина Н.П.
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей математики Казанского (Приволжского) федерального университета

Предлагается математическая модель задачи потребительского выбора с одной из возможных стратегий дилера понижения цены товара, в зависимости от увеличения объёма покупки. Показано, что функции, описывающие математическую модель, относятся к классу липшицевых. Исследуются возможности численного анализа задачи методом внешних штрафных функций. Приведены результаты расчёта тестовых примеров.

Ключевые слова: задача потребительского выбора, переменный вектор цен, липшицевость бюджетных ограничений.

Задачи потребительского выбора с линейными бюджетными ограничениями и гладкими функциями полезности хорошо изучены и их анализ изложен в многочисленных источниках (см., например, [1, с. 115; 2, Глава 1]). Эти задачи можно разбить на два класса – прямые (маршаллианские) и двойственные (хиксианские). Нас будут интересовать некоторые обобщения задач первого класса.

Существенным моментом в классических постановках является то, что цены приобретаемых благ являются постоянными и не зависят от количества приобретаемого продукта. Интерес представляют задачи, в которых цены благ понижаются при увеличении объёма покупки.

Попытка численного анализа подобной модели, в которой цена является дробно-линейной функцией от объёма покупки, была сделана в работе [3]. Однако, никак не обосновывается практический смысл такой зависимости, не исследуются параметры модели, от которых зависит характер бюджетных ограничений задачи и значения которых могут привести к некорректной постановке (например, отрицательное значение цены). Указанная модель также была некорректно названа двойственной, поскольку обычно двойственной парой задач считается маршаллианская и хиксианская модели.

В работе [4] авторами статьи была рассмотрена одна из возможных стратегий дилера по снижению цен и проведён анализ, показавший возможность применения метода штрафных функций для численного решения получаемой прямой задачи потребительского выбора.

Ниже предлагается ещё одна постановка задачи, в которой цена по-прежнему считается убывающей при увеличении объёма покупки, но при другой стратегии дилера. Проводится анализ постановки задачи, показывающий возможность применения метода штрафных функций при условии липшицевости функции полезности. Показано, что функция расстояния от точки до ограниченного замкнутого множества является липшицевой и может быть использована в качестве функции штрафа.

1. Описание модели

Как и в работе [4], будем полагать, что покупатель является «информированным», т.е. ему известна стратегия дилера по снижению цен, а причины выбора такой стратегии нас интересовать не будут.

Будем пользоваться следующей терминологией:

• *набор благ (продуктов)* – вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, где $x_j \geq 0$, $j = \overline{1, n}$, – количество j-го блага, приобретаемое покупателем у дилера и измеряемого в «непрерывно изменяющихся» единицах, на которое может быть установлено ограничение $x_j^{min} \leq x \leq x_j^{max}$, где x_j^{min} и x_j^{max} – соответственно минимальное и максимальное количество j-го блага, которое может быть приобретено у дилера;

• *доход (капитал) потребителя*, $M > 0$, – ограниченное количество денежных средств потребителя, которое он может использовать для приобретения благ;

• *вектор цен благ*, $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, устанавливаемых дилером на приобретаемые потребителем блага, где величины

$$p_j = p_j(x_j), \; j = \overline{1,n},$$

представляют собой цену единицы приобретаемого j-го продукта в количестве x_j;

• *стоимость набора благ* x, определяемая вектором цен p, – количество денежных средств потребителя, требуемое к оплате всего приобретаемого набора благ x, обозначаемое далее как

$$S(x) = S(x, p(x));$$

• *бюджетное ограничение* – условие, ограничивающее сверху стоимость приобретаемого набора благ доходом потребителя;

• *функция полезности, $u = u(x)$*, – функция, отражающая уровень (или степень) удовлетворения потребностей потребителя приобретаемым набором благ x, являющаяся изотонной, т.е. в нашем случае $u(x') \leq u(x'')$, если каждая координата вектора x' не превосходит соответствующей координаты вектора x'';

• *поверхность безразличия* – поверхность равноценных (имеющих для покупателя одинаковую полезность) наборов благ, задаваемая уравнением $u(x) = c$, $c = \text{const}$.

Обозначим:

Классическая постановка прямой задачи потребительского выбора, т.е. задачи с постоянным вектором цен,

$$G = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in [0; \infty)^n : \forall j = \overline{1,n} \; (x_j^{min} \leq x \leq x_j^{max})\}.$$

имеет вид:

$$u(x) = u(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max,$$
$$x \in G,$$
$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j - M \leq 0.$$

Легко заметить, что вследствие изотонности функции полезности последнее неравенство может быть заменено равенством.

В работе [4] было предложено одно из возможных обобщений классической постановки:

$$u(x) = u(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to max$$
$$S(x) - M = 0, \qquad (1)$$
$$x \in G,$$

с функцией стоимости, вычисляемой по формуле:

$$S(x) = \sum_{j=1}^{n} S_j(x_j), \qquad (2)$$

где

$$S_j(x_j) = \int_0^{x_j} p_j(y)dy, \quad j = \overline{1,n}. \qquad (3)$$

Ниже изучим задачу (1), но в отличие от [4] введём иной тип стратегии дилера по понижению цены, который назовём «кусочно-линейным». Для удобства индекс j будем опускать, а также будем использовать верхнюю индексацию цен и количеств блага.

2. Описание стратегии снижения цен

Будем рассматривать фиксированные значения количества блага $0 = a^0 < a^1 < a^2 < \ldots < a^{m+1}$ и соответствующие цены $p^{m+1} = p^m > p^{m-1} > \ldots > p^1 > p^0 > 0$. Пары (a_i, p^{m+1-i}), $i = \overline{0; m+1}$, представляют собой координаты точек излома графика функции цены единицы продукта – в них происходит изменение скорости снижения цены.

Функция цены в этом случае может быть задана следующей формулой 4:

$$p(x) = p^{m-i+1} + \frac{p^{m-i} - p^{m-i+1}}{a^{i+1} - a^i}(x - a_i), \; x \in [a^i; a^{i+1}], \; i = \overline{0, m}$$

а зависимость $S(x)$ при $x \in [a^i; a^{i+1}]$, $i = \overline{0, m}$ будет иметь вид (формула 5):

$$S(x) = \frac{p^{m-i} - p^{m-i+1}}{2(a^{i+1} - a^i)}(x - a^i)^2 + p^{m-i+1}(x - a^i) + \sum_{j=0}^{i-1} \frac{p^{m-j} + p^{m-j+1}}{2}(a^{j+1} - a^j).$$

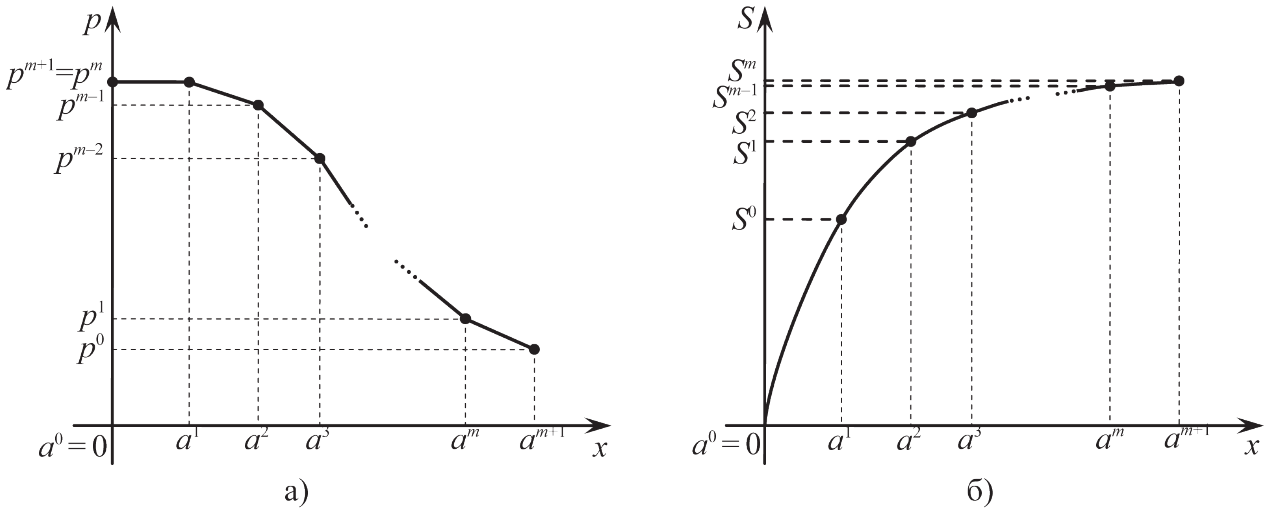

Рис. 1. «Кусочно-линейная» функция цены и стоимости блага

Графики функций (4) и (5) представлены на рисунке 1.

Из (5) и рисунка 1.б видим, что график функции *S(x)* состоит из строго возрастающих кусков вогнутых (выпуклых вверх) парабол на отрезках $[a^i; a^{i+1}]$, $i = \overline{0, m}$. Следует это из строгой положительности функции *p(x)*. При этом вся функция *S(x)* является строго возрастающей на всей области определения $[0; a^{m+1}]$. Поскольку *p(x)* является убывающей функцией, кривизна *S(x)* с возрастанием x уменьшается, а это значит, что *S(x)* является вогнутой (выпуклой вверх) на всей области определения $[0; a^{m+1}]$.

3. Применение метода штрафных функций для численного анализа модели

Для численного анализа задачи (1) может быть использован метод внешних штрафных функций. Его стандартное применение заключается в переходе от задачи (1) к последовательной минимизации функций

$$F_k = -\alpha_k u(x) + |g(x)|, \qquad (6)$$

где коэффициенты α_k удовлетворяют условиям:

$$\alpha_k > 0, \quad \alpha_k \xrightarrow[k]{} 0$$

а $g(x) = S(x) - M$ – функция, задающая множество ограничений $A = \{x: g(x) = 0\}$.

Существенным является требование глобальности искомого минимума функций (6). Одним из свойств, позволяющих отыскивать глобальный минимум штрафной функции, является её липшицевость, однако для этого липшицевыми должны быть функция полезности *u(x)* и функция ограничения *g(x)*.

Липшицевость функции *u(x)* можно потребовать заранее.

Покажем, что предложенная функция *g(x)* также является липшицевой. Ясно, что для этого достаточно показать липшицевость функции стоимости *S(x)*.

Произведём анализ предложенной функции стоимости (5).

Из рисунка 1.б заметим, что график функции *S(x)* имеет наибольший наклон в нуле. Кроме того, на каждом из отрезков $[a^i; a^{i+1}]$, $i = \overline{0, m}$, функция *S(x)* является непрерывно дифференцируемой, поэтому оценка её постоянной Липшица может быть определена как значение производной функции стоимости при $x = 0$. В этом случае из (5) получаем, что указанные постоянные Липшица определяются как

$$L = p^{m+1} = p^m \qquad (7)$$

В случае рассмотрения набора *n* благ, очевидно, оценку постоянной Липшица функции стоимости (2), каждая из зависимостей $S_j(x_j)$ в которой имеет вид, аналогичный (5), а также функции ограничения можно вычислить по формуле:

$$L_g = L_S = \sum_{j=1}^{n} L_j = \sum_{j=1}^{n} p_j^m,$$

где L_j, $j = \overline{1, n}$, – постоянные Липшица функций (3), определяемые по (7).

Если принять теперь, что функция полезности является липшицевой с постоянной L_u, то постоянная Липшица штрафной функции (6) будет вычисляться по формуле:

$$L_k = \alpha_k L_u + L_g$$

Теперь для минимизации штрафной функции (6) может быть применён один из методов минимизации липшицевых функций, например, метод ломаных.

Многими авторами предлагаются и другие функции штрафа. Так, Ф.П. Васильевым [5, с. 324] предлагается в качестве штрафа использовать функцию расстояния от итерационной точки до множества ограничений А. В нашем случае штрафная функция при этом примет вид:

$$\Phi_k(x) = -\alpha_k u(x) + \rho(x, A) \qquad (8)$$

где $\rho(x, A)$ – расстояние от точки *x* до множества *A*.

Для достаточно общего случая можно показать липшицевость функции расстояния.

Предложение. *Если A – компактное множество в* R^n, *то функция* $\rho(x, A)$ *липшицева по x с константой Липшица, равной 1.*

Доказательство. Обозначим $\rho(x, y) = \|x - y\|$ и положим $f_1(y) = \rho(x_1, y)$, $f_2(y) = \rho(x_2, y)$.

Из [6, с. 325] известно, что если A – компактное множество в R^n, а f_1 и f_2 непрерывны на A, то справедливо неравенство:

$$\left|\min_A f_1(x) - \min_A f_2(x)\right| \le \max_A \left| f_1(x) - f_2(x)\right|.$$

В силу указанного неравенства будет иметь место оценка:

$$\left|\rho(x_1, A) - \rho(x_2, A)\right| = \left|\min_{y\in A} \rho(x_1, A) - \min_{y\in A} \rho(x_2, A)\right| =$$

$$= \left|\min_{y\in A} f_1(y) - \min_{y\in A} f_2(y)\right|$$

$$\le \max_{y\in A} \left| f_1(y) - f_2(y)\right|,$$

а вследствие непрерывности на A функций $f_1(y)$ и $f_2(y)$ найдётся $\tilde{y} \in A$, такой, что

$$\max_{y\in A} \left| f_1(y) - f_2(y)\right| = \left| f_1(\tilde{y}) - f_2(\tilde{y})\right| =$$

$$= \left|\rho(x_1, \tilde{y}) - \rho(x_2, \tilde{y})\right| \le \rho(x_1, x_2).$$

Таким образом,

$$\left|\rho(x_1, A) - \rho(x_2, A)\right| \le \rho(x_1, x_2) = \left\| x_1 - x_2 \right\|,$$

что и доказывает предложение.

Данное предложение показывает возможность использования штрафных функций вида (8), однако процедура вычисления значения функции $\rho(x, A)$ представляет отдельную, вообще говоря, сложную задачу. Для её решения могут быть использованы, например, алгоритмы проектирования точки, описанные в работах [7; 8].

В силу сказанного может быть предложен следующий алгоритм.

Через k шагов минимизации штрафной функции вида (6), в результате которых получена точка x^k, производится проверка условия останова:

$$\rho(x^k, A) \le \varepsilon, \qquad (9)$$

где $\varepsilon > 0$ – заданная точность. В случае нарушения указанного условия производится очередная серия из k шагов.

4. Численный эксперимент

В качестве примера рассмотрим задачу потребительского выбора (1) для $n = 2$ благ, цены на которые изменяются по описанной стратегии, с функцией полезности типа функции Леонтьева:

$$u(x_1,x_2) = \min\{\gamma_1 x_1, \gamma_2 x_2\},\ x_1, x_2, \gamma_1, \gamma_2 > 0 \qquad (10)$$

Очевидно, что её постоянная Липшица может быть вычислена по формуле:

$$L_u = max\{\gamma_1, \gamma_2\},$$

а функция полезности $u(x_1, x_2)$ не будет гладкой.

Для решения поставленной задачи потребительского выбора составлен рабочий алгоритм предложенной выше реализации метода штрафных функций по схеме (6) с условием останова (9), реализованный затем программно. Решение вспомогательной задачи глобальной минимизации штрафной функции (6) на каждом итерационном шаге выполнено с помощью метода последовательного перебора Ю.Г. Евтушенко [9]. Поиск величины $\rho(x, A)$ выполнен с помощью алгоритма проектирования точки на невыпуклое множество, разработанного в статье [7].

Расчёты проведены для функции полезности (10) с $\gamma_1 = 5$ и $\gamma_2 = 4$.

В качестве расчётного примера рассматриваются два варианта модели, параметры которых приведены в таблице 1. В данной таблице приняты следующие обозначения: j – номер блага, m_j – количество промежуточных узлов функции снижения цены j-го товара, a_j^i, p_j^i – координаты крайних и промежуточных узлов графика функции снижения цены, i – номер узла.

С помощью разработанного программного обеспечения проведён ряд расчётов для различных величин точности ε и дохода потребителя M. В качестве иллюстрации в таблице 2 приводятся результаты экспериментов для двух величин точности и четырёх вариантов величины дохода. Здесь через x_1^* и x_2^* обозначены абсцисса и ордината, соответственно, найденной точки максимума функции полезности; u^* – значение функции $u(x_1, x_2)$ в этой точке; ρ – расстояние от найденной точки до множества бюджетного ограничения; t – примерное время вычислений в секундах; ε – точность решения.

Авторами рассмотрено одно естественное обобщение прямой задачи потребительского выбора с ценами благ, зависящими от объёма покупки, со стратегией понижения цены, которая считается известной покупателю. Вследствие негладкости полученной модели для её анализа не применимы подходы, основанные на методе Лагранжа [1, с. 118; 2, с. 21]. Для численного решения задачи предложены возможные реализации метода штрафных функций. С помощью разработанного программного обеспечения проведён ряд экспериментальных расчётов, реализующих предложенные алгоритмы.

Таблица 1

Значения параметров модели

№ набора	j	m_j		i = 0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	a_j^i	0	5	8	10			
			p_j^i	7	12	15	15			
	2	3	a_j^i	0	6	12	16	20		
			p_j^i	10	16	20	25	25		
2	1	4	a_j^i	0	6	9	11	13	15	
			p_j^i	10	14	17	20	22	22	
	2	5	a_j^i	0	9	15	19	23	26	28
			p_j^i	12	15	17	20	22	25	25

Таблица 2

Результаты расчётов

№ набора	M	ε	x_1*	x_2*	u*	ρ	t, c
1	100	0.1	6.766296	0.003750	0.015000	0.000708	1.490
		0.01	6.770678	0.000375	0.001500	0.000047	119.361
	200	0.1	10.000000	2.621233	10.484932	0.000771	5.400
		0.01	10.000000	2.620025	10.480102	0.000016	459.551
	300	0.1	10.000000	6.626325	26.505299	0.000134	11.350
		0.01	10.000000	6.626639	26.506557	0.000059	1800.449
	400	0.1	10.000000	11.043345	44.173382	0.000360	20.750
		0.01	10.000000	11.043962	44.175846	0.000040	3436.133
2	200	0.1	9.249152	0.003191	0.012766	0.000346	5.470
		0.01	9.251913	0.000319	0.001277	0.000029	973.662
	400	0.1	14.999619	4.520186	18.080746	0.000018	23.550
		0.01	15.000000	4.519959	18.079838	0.000022	2142.026
	600	0.1	15.000000	12.654182	50.616730	0.000347	53.300
		0.01	15.000000	12.653500	50.613998	0.000010	5602.646
	800	0.1	15.000000	22.361235	75.000000	0.000256	175.220
		0.01	15.000000	22.361973	75.000000	0.000018	8883.466

Литература:

1. Шелобаев С.И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе: учеб. пособие для вузов. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001. – 367 с.
2. Черемных Ю.Н. Микроэкономика. Продвинутый уровень. – М.: ИНФРА-М, 2008. – 844 с.
3. Ян Икума Иссомбо. Численное решение задачи потребительского выбора с нелинейными бюджетными ограничениями // Международный журнал «Программные продукты и системы». – 2011. – № 2. – С. 76-79.
4. Арутюнова Н.К., Заботин В.И., Заботина Н.П. Экономико-математическая модель задачи потребительского выбора с ценами благ, зависящими от объёма покупок // Вестник экономики, права и социологии. – 2014. – № 2. – С. 7-10.
5. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. – М.: Факториал Пресс, 2002. – 824 с.
6. Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н. Введение в минимакс. – М.: Наука: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1972. – 368 с.
7. Заботин В.И., Дуллиев А.М. Итерационный алгоритм проектирования точки на невыпуклое многообразие в линейном нормированном пространстве // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2004. – Т. 44. – № 5. – С. 834-837.
8. Арутюнова Н.К., Дуллиев А.М., Заботин В.И. Алгоритмы проектирования точки на поверхность уровня непрерывной на компакте функции // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2014. – Т. 54. – № 9. – С. 1448-1454.
9. Евтушенко Ю.Г. Численный метод поиска глобального экстремума функций (перебор на неравномерной сетке) // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1971. – Т. 11. – № 6. – С. 1390-1403.

Direct Problem of Consumer Choice with Cost-Related Prices of Goods and Its Numerical Solutions

N.K. Arutyunova, V.I. Zabotin
Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev
N.P. Zabotina
Kazan (Volga Region) Federal University

The paper presents mathematical model of consumer choice task and one of the possible dealer strategies of lowering of prices depending on upselling. It is demonstrated that functions featuring mathematical model are Lipschitzian. The authors analyze the benefits of numerical analysis of the problem by the method of penalty functions and present the results of calculation of test cases.

Key words: problem of consumer choice, variable price vector, Lipschitzness of budget restrictions.