УДК 519.86

Экономико-математическая модель задачи потребительского выбора с ценами благ, зависящими от объёма покупок

Арутюнова Н.К.
Аспирант кафедры прикладной математики и информатики
Казанского национального исследовательского технического университета им. А.Н. Туполева – КАИ

Заботин В.И.
Доктор технических наук, заведующий кафедрой математики
Университета управления ТИСБИ (Казань),
профессор Казанского национального исследовательского технического университета им. А.Н. Туполева – КАИ

Заботина Н.П.
Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры общей математики
Казанского (Приволжского) федерального университета

Предлагается одна модель задачи потребительского выбора – с зависящими от объёма приобретаемых благ ценами. Производится анализ модели и показывается, что её бюджетные ограничения являются негладкими. Приводятся результаты численного эксперимента.

Ключевые слова: задача потребительского выбора, негладкие бюджетные ограничения, зависимость цены от объема покупки.

Классические модели задачи потребительского выбора с линейными бюджетными ограничениями и гладкими функциями полезности изучены давно и являются предметом изложения в литературе по экономико-математическим моделям и методам (например, [1; 2]). В статье [3] рассматривается постановка задачи потребительского выбора с нелинейными гладкими бюджетными ограничениями и предлагается её численный анализ для различных функций полезности.

Представляет интерес изучение задач потребительского выбора с негладкими бюджетными ограничениями и негладкой функцией полезности. Как будет показано ниже, к таким задачам приводит предположение о зависимости цен, назначаемых продавцом, от количества приобретаемого потребителем блага. Здесь существенную роль играет стратегия продавца (дилера) по понижению цены.

Мы рассмотрим один тип таких стратегий, выбор которой определяется только дилером и в явной форме не учитывает его затраты на приобретение благ у производителя.

Модель задачи потребительского выбора

Аналогично [4] мы введём термин «информированный покупатель», однако придадим ему несколько иной смысл: мы будем предполагать, что покупателю известна стратегия дилера по снижению цен на блага в зависимости от приобретаемого количества последнего, при этом нас не будет интересовать осведомлённость покупателя о затратах дилера на приобретение благ у производителя. В дальнейшем под словом «покупатель» (потребитель) будем понимать «информированный покупатель».

Для простоты будем рассматривать случай с одним дилером, стратегии которого по снижению цен в зависимости от количества приобретаемых благ нам известны и являются однотипными. Разумеется, стратегии понижения цен для разных благ могут выбираться различными, однако это усложнит изложение, не приводя к принципиальным трудностям.

Будем опираться на устоявшиеся терминологию и обозначения, несколько изменив их вследствие вносимых предложений:

• *набор благ (продуктов)*, x, – вектор-столбец $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, где $x_j \geq 0$, $j=\overline{1, n}$, – количество j-го блага, приобретаемого покупателем у дилера и измеряемого в «непрерывно изменяющихся» единицах (килограммах, литрах, метрах и т.п.);

• *доход потребителя*, M, – ограниченное количество денежных средств $M > 0$ потребителя, которые он может использовать для приобретения благ;

• *вектор цен благ*, p, – вектор-строка $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ цен, устанавливаемых дилером на приобретаемые потребителем блага, где величины

$$p_j = p_j(x_j), \qquad j = \overline{1, n}\,, \qquad (1.1)$$

представляют собой цену за единицу приобретаемого j-го продукта для количества x_j;

• *стоимость набора благ* x, определяемая вектором цен p, $S(x)$, – количество денежных средств потребителя, требуемых к оплате за весь приобретаемый набор благ x:

$$S(x) = S(x, p(x)); \qquad (1.2)$$

• *бюджетное ограничение* – условие ограниченности стоимости приобретаемого набора благ доходом потребителя, т.е.

$$S(x) \leq M;$$

• *функция полезности*, $u = u(x)$, – функция, соответствующая отношению предпочтения потребителя, отражающая уровень (или степень) удовлетворения его потребностей приобретаемым набором благ x;

• *поверхность безразличия* – поверхность равноценных (имеющих одинаковую полезность) наборов благ, задаваемая уравнением $u(x) = c$, $c = const$.

Для каждого j-го блага, $j=\overline{1, n}$, может быть установлено минимальное $x_j^{\min}$ и максимальное $x_j^{\max}$ количество, которое может быть приобретено у дилера, и сформировано множество допустимых значений вектора благ:

$$G = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in [0; \infty)^n :$$
$$: \forall j = \overline{1, n}\ (x_j^{min} \leq x \leq x_j^{max})\}.$$

Задача потребительского выбора состоит в нахождении такого набора благ, который обеспечивает максимально возможное значение функции полезности при имеющемся доходе потребителя и заданном векторе цен.

Поскольку в классической задаче потребительского выбора цены (1.1) считаются постоянными, формула (1.2) вычисления стоимости набора благ имеет вид:

$$S(x) = px = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j,$$

и, следовательно, бюджетное ограничение будет задаваться неравенством:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \leq M.$$

С учётом изотонности функции полезности бюджетное ограничение может быть принято в виде равенства, а тогда модель классической задачи потребительского выбора запишется в следующем виде:

$$u(x) = u(x_1, x_2, \dots, x_n) \to max,$$
$$x \in G,$$
$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j - M = 0.$$

В рассматриваемом же случае, когда цены (1.1) не являются постоянными, функция стоимости (1.2) может быть вычислена различным образом. Мы будем считать её как сумму площадей фигур под графиками $p_j = p_j(x_j)$, на отрезке $[0; x_j]$, $j=\overline{1, n}$, т.е. по формуле:

$$S(x) = \sum_{j=1}^{n} S_j(x_j), \qquad (1.3)$$

где

$$Sj(xj) = \int_0^{xj} p_j(y)dy, \qquad j=\overline{1, n}. \quad (1.4)$$

Отметим, что указанный способ вычисления стоимости обеспечивает непрерывность функций $S_j(x_j)$, $j=\overline{1, n}$.

Тогда задача потребительского выбора может быть поставлена в следующем общем виде:

$$u(x) = u(x_1, x_2, \dots, x_n) \to max,$$
$$S(x) - M = 0, \qquad (1.5)$$
$$x \in G.$$

Рассмотрим один тип функции понижения цены (1.1) и получаемой при этом зависимости стоимости (1.4) для одного j-го блага. Ниже для удобства индекс j будем опускать. Будем также использовать верхнюю индексацию цен и количеств блага.

Описание стратегии снижения цен

Пусть заданы величины цены $p^m > p^{m-1} > \dots > p^1 > p^0 > 0$ за единицу продукта и $0 < a^1 < a^2 < \dots < a^m$ – значения количества блага, при которых производится ступенчатое снижение цены. Для простоты будем считать, что нижнее ограничение на количество приобретаемого блага дилером не установлено, т.е. примем $a^0 = 0$. Наибольшее же значение, доступное для приобретения, примем равным a^{m+1} ($a^{m+1} > a^m$). Таким образом, закон изменения цены в зависимости от количества приобретаемого блага примет вид:

$$p(x) = p^{m-i}, \text{ если } x \in (a^i, a^{i+1}], \ i = \overline{0, m}. \qquad (2.1)$$

При этом стоимость S всего количества x, $x \in [0; a^{m+1}]$, приобретаемого блага будет вычисляться по формуле:

$$S(x) = \sum_{j=0}^{i-1} p^{m-j}(a^{j+1} - a^j) + p^{m-i}(x - a^i),$$

$$x \in (a^i, a^{i+1}], \ i = \overline{0, m}. \qquad (2.2)$$

Графически зависимости (2.1) и (2.2) представлены на рис. 1.

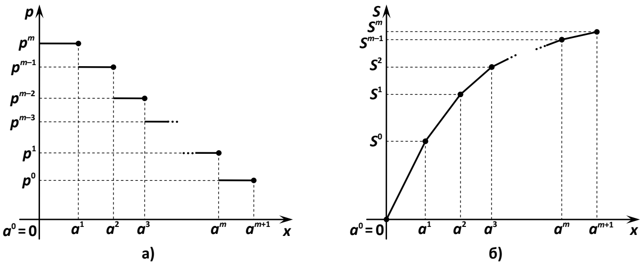

Рис. 1. «Ступенчатая» функция цены и функция стоимости блага

Таким образом, (2.2) является кусочно-линейной функцией, составленной из отрезков прямых с угловыми коэффициентами $p^m, p^{m-1}, \ldots, p^1, p^0$. Заметим, что указанная последовательность значений цены убывает, т.е. угловой наклон графика функции на каждом следующем промежутке $(a^i, a^{i+1}]$, $i=\overline{0, m}$, меньше, чем на предыдущем, а это значит, что функция $S(x)$ является вогнутой (выпуклой вверх) на всей области определения $(0; a^{m+1}]$. Кроме того, функция $S(x)$ является строго возрастающей на $(0; a^{m+1}]$.

Формула (2.2) достаточно проста, однако неудобна для практического использования. Поэтому предлагается иной способ задания $S(x)$, справедливый вследствие её вогнутости.

Для этого вводятся вспомогательные матрицы:

• вектор-строка цен

$$\tilde{P}_i = (\tilde{p}_i^j), \qquad \tilde{p}_{ij} = \begin{cases} p^{m-i}, & j \le i, \\ 0, & j > i, \end{cases} \quad i, j = \overline{0, m},$$

• вектор-столбец количества блага

$$\tilde{A}_i(x) = (\tilde{a}_i^j)^T, \ \tilde{a}_i^j = \begin{cases} a^{j+1} - a^j, & j < i \\ x - a^j, & j = i, \ i,j = \overline{0, m}. \\ 0, & j > i, \end{cases}$$

Представление (2.2) функции стоимости эквивалентно следующему:

$$S(x) = \min_{0 \le i \le m} \tilde{P}_i \tilde{A}_i(x).$$

Покажем, что и получающаяся при этом функция ограничения задачи (1.5) является липшицевой.

Оценка постоянной Липшица функции ограничения

Оценка постоянной Липшица функции ограничения, очевидно, зависит от вида функции стоимости, используемой в модели.

Заметим, что график функции $S(x)$ имеет наибольший наклон на первом участке, в частности в нуле. Кроме того, на каждом из отрезков $[a^i, a^{i+1}]$, $i=\overline{0, m}$, функция $S(x)$ является непрерывно дифференцируемой, поэтому оценку постоянной Липшица можно найти как значение производной функции стоимости при $x = 0$. В этом случае получаем, что

$$L = p^m. \qquad (3.1)$$

Оценка получена для функции стоимости одного блага, т.е. имеет место для каждой из функций (1.4). В случае рассмотрения набора n благ, очевидно, оценку постоянной Липшица функции стоимости (1.3) можно вычислить по формуле:

$$L = \sum_{j=1}^{n} L_j = \sum_{j=1}^{n} p_j^m,$$

где L_j, $j=\overline{1, n}$, – постоянные Липшица функций (1.4), вычисляемые по (3.1).

Описание численного эксперимента

Построенная модель является существенно негладкой по бюджетным ограничениям. Негладкой может оказаться и целевая функция полезности (например, типа функции Леонтьева), поэтому для численного решения задачи методы, использующие производную функций оказываются неприменимы.

Полученная в работе оценка постоянной Липшица функции ограничения позволяет использовать метод штрафных функций. С использованием этого метода просчитан ряд тестовых примеров, ниже приводится один из них.

Расчёты проведены для функции полезности типа функции Леонтьева:

$$u(x_1, x_2) = \min\{\gamma_1 x_1, \gamma_2 x_2\}, \ x_1, x_2, \gamma_1, \gamma_2 > 0,$$

со значениями параметров: $\gamma_1 = 5$ и $\gamma_2 = 4$.

В таблице 1 приведены два набора значений параметров модели: j – номер блага, m_j – количество промежуточных узлов функции снижения цены j-го товара, a^i_j, p^i_j – координаты графика функции снижения цены в крайних и промежуточных узлах, i – номер узла.

Таблица 1

Значения параметров модели

№ набора	j	m_j		i = 0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	a^i_j	0	5	8	10	—	—	—
			p^i_j	7	12	15	15	—	—	—
	2	3	a^i_j	0	6	12	16	20	—	—
			p^i_j	10	16	20	25	25	—	—
2	1	4	a^i_j	0	6	9	11	13	15	—
			p^i_j	10	14	17	20	22	22	—
	2	5	a^i_j	0	9	15	19	23	26	28
			p^i_j	12	15	17	20	22	25	25

Результаты ряда экспериментов для различных величин дохода потребителя M и двух значений точности ε приведены в таблице 2. Использованы следующие обозначения: x_1^* и x_2^* – абсцисса и ордината, соответственно, найденной точки максимума функции полезности; u^* – значение функции $u(x_1, x_2)$ в этой точке; ρ – расстояние от найденной точки до

Таблица 2

Результаты расчётов

№ набора	*M*	ε									
		0.1					0.01				
		x_1^*	x_2^*	u^*	ρ	t, c	x_1^*	x_2^*	u^*	ρ	t, c
1	100	7.076232	0.003750	0.015000	0.000213	1.000	7.082648	0.000375	0.001500	0.000029	81.100
	200	10.000000	3.001242	12.004967	0.000776	3.900	10.000000	2.999929	11.999716	0.000044	335.410
	300	10.000000	7.248839	28.995356	0.000581	8.860	10.000000	7.250047	29.000187	0.000023	805.845
	400	9.999100	12.313132	49.252529	0.000096	17.050	10.000000	12.312514	49.250057	0.000006	1643.169
2	200	9.466083	0.003191	0.012766	0.000068	3.640	9.470263	0.000319	0.001277	0.000052	327.286
	400	15.000000	5.039332	20.157330	0.000355	16.900	15.000000	5.039936	20.159744	0.000034	1515.358
	600	14.999293	13.590347	54.361389	0.000414	40.940	15.000000	13.590946	54.363785	0.000018	4013.147
	800	15.000000	24.399284	75.000000	0.000229	67.130	15.000000	24.399937	75.000000	0.000021	6693.407

множества бюджетного ограничения; *t* – примерное время вычислений (с); ε – точность решения.

Таким образом авторами предложено одно из естественных для рынка обобщений классической модели задачи потребительского выбора. Показано, что полученная модель является существенно негладкой и вследствие этого не допускающей исследования стандартными методами, основанными на построении функции Лагранжа [1; 2], что делает необходимым применение специальных математических методов для её численного анализа.

Литература:

1. Минюк С.А., Ровба Е.А., Кузьмич К.К. Математические методы и модели в экономике: учеб. пособие. – Мн.: ТетраСистемс, 2002. – 432 с.
2. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике: учеб. 2-е изд. – М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, Издательство «Дело и Сервис», 1999. – 368 с.
3. Иссомбо И. Численное решение задачи потребительского выбора с нелинейными бюджетными ограничениями // Международный журнал «Программные продукты и системы». – 2011. – № 6. – С. 49–51.
4. Заложнев А.Ю. Модели принятия решений об объемах закупок фирмой – оптовым покупателем в зависимости от изменения отпускных цен производителя и спроса конечных покупателей // Сборник трудов «Управление большими системами». – 2003. – № 3. – С. 35–42.

Economic-Mathematic Model of the Task of Consumer Choice with the Cost of Goods Depending on Purchase Amount

N.K. Arutyunova, V.I. Zabotin

Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev

N.P. Zabotina

Kazan (Volga Region) Federal University

The authors suggest the model of costs depending on the purchase amount of goods. Based on the analysis of the model, it is stressed that its budget constraints are non-smooth. The results of numerical study are presented.

Key words: the task of consumer choice, non-smooth budget constraints, dependence of cost on the purchase amount.